1次元反射壁Markov過程の確率微分方程式による構成 (マルコフ過程論)

田中, 洋

数理解析研究所講究録
112巻 1971年 120-133

1次元反射壁Markov過程の確率微分方程式による構成

東大 理　田中 洋

§1. 序.

$R_+ = [0, \infty)$ 上の反射壁Brown運動の構成法としては，例えば，(1) 折返し（R^1 上のBrown運動の絶対値をとる操作）によるもの，(2) infimum process を用いるもの，(3) Skorohod の確率微分方程式によるもの，等をあげることが出来る．一方，pathsが不連続なMarkov過程，例えば安定過程の場合には，渡辺信三氏[5]，Elliott[2]の研究があり，これらの研究からわかることであるが，一般にpathsが不連続の場合は R_+ での反射壁過程の構成として(1)の方法は適用しない．実際，[5]において R_+ での反射壁安定過程のpathsは(2)の方法によって構成されている．このノートでは，不連続なMarkov過程でとくに確率微分方程式の解として与えられる場合について，(3)のSkorohodの方法の拡張を与える．この方法は，最初に与えられた確率微分方程式が定数係数の場合，すなわち，Lévy過程の場合には，(2)の方法に他ならないことがわかる．

多次元で不連続pathsの場合でも，ここでのべる方法の拡張として，境界条件をもつMarkov過程を確率微分方程式を用いて構成することがある程度可能と思われるが，これについてはふれない．境界以外でpathsが連続な場合のこのような研究については，池田氏[1]および最近の渡辺信三氏[6]の結果がある．

§2. 不連続pathsの場合のSkorohod's equation.

Skorohodの確率微分方程式([4][3])はpathsが連続な場合である．これをpathsが不連続な場合に拡張する．

$R_+\times R^1$のBorel集合Aに対して，$\lambda(A)=\int_A |u|^{-2}\,dt\,du$とおく．$(\Omega, \mathcal{B}, P)$を適当な確率空間とし，この上で定義された1次元Brown運動$\beta(t)$ ($\beta(0)=0$としておく)および測度λに対応するPoisson加法系$\{p(A)\}$を考える．そして，Brown運動$\beta(t)$とPoisson加法系$\{p(A)\}$とは独立であると仮定する．$\lambda(A)<\infty$であるようなAに対して$q(A)=p(A)-\lambda(A)$とおく．さらに$t\in R_+$に対し$\mathcal{B}_t=\sigma\{\beta(s), p(A) : 0\le s\le t, A\subset[0,t]\times R^1\}$とおく．

一般に，$x(t)$をR_+の中に値をもつ確率過程で，pathsが右連続かつ左極限をもつものとするとき，次の3条件をみたす$\varphi(t)$を$x(t)$に対応するincreasing functionalと呼ぶことにする．

(i) $\varphi(t)$は右連続，単調非減少，$\varphi(0)=0$.

(ii) $x(t)>0$ かつ $x(t-)>0$ であるような時点 $t>0$ においては，ある $\varepsilon>0$ が存在して $\varphi(t-\varepsilon)=\varphi(t+\varepsilon)$.

(iii) $x(t)>0$ であるような時点 t においては $\varphi(\cdot)$ は連続.

今，R_+ において定義された実数値 Borel 函数 $a(x)$, $b(x)$，および $R_+\times R^1$ において定義された実数値 Borel 函数 $c(x,u)$ が与えられたとして，次のような確率微分方程式を考える．

$$
\text{(I)}\quad
\begin{aligned}
x(t) &= x+\int_0^t a(x(s))\,d\beta(s)+\int_0^t b(x(s))\,ds \\
&\quad +\int_0^t\int_{|u|\le 1} c(x(s),u)\,\tilde{q}(ds\,du)+\int_0^t\int_{|u|>1} c(x(s-),u)\,p(ds\,du)+\varphi(t)
\end{aligned}
$$

ただし，$x(t)$ と共に $\varphi(t)$ も未知であって次の条件をみたすものとする：

$$
\begin{cases}
\text{(a)}\ \ x(t)\ \text{は右連続，左極限をもち，}\ x(t)\geqq 0.\ \text{かつ任意の}\ t\ \text{に対して}\ x(t)\ \text{は}\ \mathcal{B}_t\text{-可測である.} \\
\text{(b)}\ \ \varphi(t)\ \text{は}\ x(t)\ \text{に対応する increasing functional である.}
\end{cases}
$$

方程式(I)の解の存在と一意性を示すために，係数 a, b, c に対して次のような仮定をおく．

<u>仮定A</u> (i) ある定数 K が存在して

$$
|a(x)-a(y)|^2+|b(x)-b(y)|^2+\int_{|u|\le 1}|c(x,u)-c(y,u)|^2\frac{du}{|u|^2}\leqq K^2|x-y|^2
$$

(ii) $$\int_{|u|\le 1}|c(x,u)|^2\frac{du}{|u|^2}<\infty$$

(iii) $c(x,u)$ は $[0,\infty)\times[-1,1]$ の各コンパクト集合の上で有界.

定理 I　仮定 A のもとでは，任意の $x\in R_+$ に対して，方程式 (I) の解は存在して一意である.

証明はすべて §4 で与えるが，次の特別な場合を先ず証明するので，それを定理としてあげておく．方程式 (I) の代りに

$$(\mathrm{I}_0)\quad \begin{aligned} x(t) = x &+ \int_0^t a(x(s))\,d\beta(s) + \int_0^t b(x(s))\,ds \\ &+ \int_0^t\int_{R^1} c(x(s),u)\,q(ds\,du) + \varphi(t) \end{aligned}$$

を考え，仮定 A の代りに

仮定 A_0　(i) ある定数 K があって

$$|a(x)-a(y)|^2 + |b(x)-b(y)|^2 + \int_{R^1}|c(x,u)-c(y,u)|^2\frac{du}{|u|^2} \leq K^2|x-y|^2$$

(ii) $c(x,u)$ は有界，$\displaystyle\int_{R^1}|c(x,u)|^2\frac{du}{|u|^2} < \infty$.

定理 I_0　仮定 A_0 のもとでは，任意の $x\in R_+$ に対して，(I_0) の解が存在して一意である．$x(t)$ を初期値 x に対する (I_0) の解，$y(t)$ を初期値 y に対応する (I_0) の解とすると

$$E\{|x(t)-y(t)|^2\} \leq |x-y|^2 e^{(K^2+1)t}.$$

§3．基本的な補題.

この節では，前節の定理の証明の基礎となる補題をのべる.

補題　$f(t)$をR_+で定義された実数値函数で，右連続，左極限をもち，かつ$f(0)\geq 0$であるとする．$x(t)$をR_+で定義されR_+の中に値をもつ函数で，右連続，左極限をもつものとし，$\varphi(t)$を$x(t)$に対応するincreasing functionalとする．このとき，もし

(3.1)　$$x(t)=f(t)+\varphi(t)$$

であれば，

(3.2)　$$x(t)=\begin{cases} f(t) & t<\sigma \text{ のとき} \\ f(t)-\inf\limits_{\sigma\leq s\leq t} f(s) & t\geq\sigma \text{ のとき}\end{cases}$$

(3.3)　$$\varphi(t)=\begin{cases} 0 & t<\sigma \text{ のとき} \\ -\inf\limits_{\sigma\leq s\leq t} f(s) & t\geq\sigma \text{ のとき}\end{cases}$$

ただし　$\sigma=\inf\{t\geq 0 : f(t)<0\}$.

証明．(3.2)(3.3)で与えられる$x(t)$，$\varphi(t)$が補題でのべた性質をもち，かつ(3.1)をみたすことは容易にわかる．ゆえに，補題の中でのべた性質をもつ(3.1)の解が一意であることを証明すれば十分である．

$(x(t),\varphi(t))$，$(y(t),\tilde{\varphi}(t))$を共に(3.1)の解で，補題でのべた性質をもつものとする．$\psi(t)=\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)$とおき，$\psi(t)$の連続部分を$\psi_0(t)$，不連続部分を$\psi_1(t)$とする．すなわち，

$$\psi_1(t)=\sum_{0\leq\tau\leq t}\{\psi(\tau)-\psi(\tau-)\}\ ,\quad \psi_0(t)=\psi(t)-\psi_1(t).$$

$x(t)$, $y(t)$ が (3.1) の解であることから

$$(x(t)-y(t))^2 = \psi(t)^2 = \int_0^t\int_0^t \psi(dt_1)\psi(dt_2)$$

$$= \iint_{0\le t_1\le t_2\le t} \psi(dt_1)\psi(dt_2) + \iint_{0\le t_2\le t_1\le t} \psi(dt_1)\psi(dt_2)$$

$$- \sum_{0\leqq\tau\leqq t} (\psi(\tau)-\psi(\tau-))^2 \leqq 2\int_0^t \psi(s)\psi(ds)$$

$$= 2\int_0^t \psi(s)\psi_0(ds) + 2\sum_{0\leqq s\leqq t} \psi(s)\{\psi(s)-\psi(s-)\}.$$

もし $\psi(s)>0$ ならば，$x(s)>0$，よって，$\psi(s)-\psi(s-)\leqq 0$.
したがって

$$(x(t)-y(t))^2 \leqq 2\int_0^t \psi(s)\psi_0(ds).$$

今，$I^+ = [0,t]\cap\{s:\psi(s)>0\}$，$I^- = [0,t]\cap\{s:\psi(s)<0\}$
とおくと

(3.4) $$(x(t)-y(t))^2 \leqq 2\int_{I^+}\psi(s)\psi_0(ds) + 2\int_{I^-}\psi(s)\psi_0(ds).$$

そこで

$$I_1^+ = I^+\cap\{s:\ x(s)>0,\ x(s-)>0\}$$

$$I_2^+ = I^+\cap\{s:\ x(s)>0,\ x(s-)=0\}$$

とおくと，$I^+ = I_1^+\cup I_2^+$ をうる．さらに increasing functional の性質によって，$\psi_0(\cdot)$ は I_1^+ のある近傍において，単調非増大，I_2^+ は（高々）可算集合であることがわかる．
よって $\int_{I_1^+}\psi(s)\psi_0(ds)\leqq 0$，　$\int_{I_2^+}\psi(s)\psi_0(ds)=0$.

ゆえに $$\int_{I^+} \psi(s)\psi_0(ds) \leq 0.$$

全く同様にして, $$\int_{I^-} \psi(s)\psi_0(ds) \leq 0.$$

したがって，(3.4) より $(x(t)-y(t))^2 \leq 0$ を得る．

§4. 定理の証明.

補題. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in R_+}$ を σ-fields の増大族とし，$M_1(t)$, $M_2(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $X_1(t)$, $X_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ は何れも有界な確率過程で，$\{\mathcal{F}_t\}$ に適合しており，かつ paths は右連続，左極限をもつものとする．さらに，$M_1(t)$, $M_2(t)$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ につき martingales で，$A_1(t)$, $A_2(t)$ は有界変動過程で，total variations も有界であるとする． $X_1(t)$, $X_2(t)$ は非負であって，$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ はそれぞれ $X_1(t)$, $X_2(t)$ の increasing functionals であるとする．このとき，もし

$$X_1(t) = M_1(t) + A_1(t) + \varphi_1(t) \qquad \text{a.s.}$$
$$X_2(t) = M_2(t) + A_2(t) + \varphi_2(t) \qquad \text{a.s.}$$

であれば,

$$E\{|X_1(t)-X_2(t)|^2\} \leq E\{|M_1(t)-M_2(t)|^2\} + 2E\left\{\int_0^t (X_1(s)-X_2(s))(A_1-A_2)(ds)\right\}$$

が成立する．

証明. $$X(t) = X_1(t) - X_2(t)$$
$$M(t) = M_1(t) - M_2(t)$$

$$A(t) = A_1(t) - A_2(t)$$
$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$$
$$\tilde{\varphi}(t) = A(t) + \varphi(t)$$

とおくと，$\tilde{\varphi}(t)^2 \leq 2\int_0^t \tilde{\varphi}(s)\tilde{\varphi}(ds)$.

$$\begin{aligned} M(t)\tilde{\varphi}(t) &= \int_0^t M(t)\tilde{\varphi}(ds) \\ &= \int_0^t M(s)\tilde{\varphi}(ds) + \int_0^t \{M(t)-M(s)\}\tilde{\varphi}(ds). \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} X(t)^2 &= M(t)^2 + 2M(t)\tilde{\varphi}(t) + \tilde{\varphi}(t)^2 \\ &\leq M(t)^2 + 2\int_0^t X(s)\tilde{\varphi}(ds) \\ &\quad + \int_0^t \{M(t)-M(s)\}\tilde{\varphi}(ds) \end{aligned}$$

前節の補題の証明と同様にして

$$\int_0^t X(s)\varphi(ds) \leq 0$$

が示されるから

$$X(t) \leq M(t)^2 + 2\int_0^t X(s)A(ds) + \int_0^t \{M(t)-M(s)\}\tilde{\varphi}(ds) \tag{4.1}$$

$M(t)$ は martingale であるから

$$E\left\{\int_0^t (M(t)-M(s))\tilde{\varphi}(ds)\right\} = 0,$$

したがって (4.1)の両辺の平均をとることによって

$$E\{X(t)^2\} \leq E\{M(t)^2\} + 2E\left\{\int_0^t X(s)A(ds)\right\}.$$

定理I。の証明　逐次近似法による.

$$x_0(t) \equiv x$$

とおき，一般に $x_n(t)$ が定義されたとき，$x_{n+1}(t)$ を

$$x_{n+1}(t) = x + \int_0^t a(x_n(s))\,d\beta(s) + \int_0^t b(x_n(s))\,ds$$
$$+ \int_0^t \int_{R^1} c(x_n(s), u)\, q(ds\,du) + \varphi_{n+1}(t)$$

によって定義する．ただし $x_{n+1}(t) \geq 0$ とし，$\varphi_{n+1}(t)$ は $x_{n+1}(t)$ の increasing functional とする．前節の補題によって，このような $x_{n+1}(t)$, $\varphi_{n+1}(t)$ は一意に定まる．

$$z_{n+1}(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$$
$$M_n(t) = \int_0^t \{a(x_n(s)) - a(x_{n-1}(s))\}\,d\beta(s)$$
$$+ \int_0^t \int_{R^1} \{c(x_n(s), u) - c(x_{n-1}(s), u)\}\, q(ds\,du)$$

とおくと，この節の補題によって(*)

$$E\{|z_{n+1}(t)|^2\} \leq E\{M_n(t)^2\} + 2\int_0^t E\{z_{n+1}(s)\{b(x_n(s)) - b(x_{n-1}(s))\}\}\,ds$$
$$\leq E\{M_n(t)^2\} + \int_0^t E\{|z_{n+1}(s)|^2\}\,ds + \int_0^t E\{|b(x_n(s)) - b(x_{n-1}(s))|^2\}\,ds$$

(*) 補題においては，そこに出てくる確率過程がすべて有界であったので，先ず次のような truncation が必要である．stopping time T で，今関係している確率過程がすべて $[0, T]$ において有界となるようなものを取り，t, s の代りに $t \wedge T$, $s \wedge T$ でおきかえて，補題を適用し，最後の式（次頁の (4.2)）において，$T \uparrow \infty$ とする．

$$\leq K^2 \int_0^t E\{|z_n(s)|^2\} + \int_0^t E\{|z_{n+1}(s)|^2\} ds$$

したがって

$$E\{|z_{n+1}(t)|^2\} \leq K^2 \int_0^t E\{|z_n(s)|^2\} ds \cdot e^t .$$

これより，$0 \leq t \leq t_0$（t_0は任意）なる t に対し

(4.2) $$E\{|z_{n+1}(t)|^2\} \leq \frac{(K^2 e^t)^n \, t^{n+1}}{(n+1)!} K^2 x^2 e^{t_0}$$

そこで

$$y_n(t) = \int_0^t a(x_n(s)) d\beta(s) + \int_0^t b(x_n(s)) ds + \int_0^t \int_{R^1} c(x_n(s), u) \, g(dsdu)$$

とおくと，Chebyschev の不等式，submartingale に関する Doob の不等式を用いて

$$P\{y_n(t) \text{ converges uniformly on each compact } t\text{-interval}\} = 1.$$

したがって

$$P\{x_n(t) \to x(t) \text{ uniformly on each compact } t\text{-interval}\} = 1$$

$$P\{\varphi_n(t) \to \varphi(t) \text{ uniformly on each compact } t\text{-interval}\} = 1$$

であるような $x(t)$, $\varphi(t)$ があり，これが方程式 (I_0) の解であることは容易にわかる.

一意性の証明： $(x(t), \varphi(t))$, $(y(t), \tilde{\varphi}(t))$ 共に (I_0) の解であれば，存在証明の場合と同様な計算で

$$E\{|x(t) - y(t)|^2\} \leq (K^2 + 1) \int_0^t E\{|x(s) - y(s)|^2\} ds$$

これより

$$E\{|x(t) - y(t)|^2\} = 0 .$$

定理I_0の後半の部分も今までと同様な計算で容易にわかる．

定理Iは定理I_0を用いて証明されるわけであるが，単なる技術的部分が多いので省略する．

§5. 方程式(I)の解が定めるMarkov過程

仮定Aのもとで方程式(I)の解が一意に存在する．初期値を添数とする解の族からR_+をstate spaceとするMarkov過程が定義される。この事情は通常の確率微分方程式の場合と全く同じである．このMarkov過程を方程式(I)から定まるR_+における反射壁Markov過程と呼ぶことにする．方程式(I_0)に対しても，同様な云い方をする．定理I_0の後半の評価式からわかるように，仮定A_0のもとで(I_0)から定まる反射壁Markov過程はFeller過程である．

generatorについてふれておく．以下$a(x)$, $b(x)$, $c(x,u)$は仮定A_0をみたし，かつ$a(x)$, $b(x)$は有界であるとする．このとき方程式(I_0)が定める反射壁Markov過程を$X=\{x(t), P_x\}$とし，その semigroupをT_tとする．$C_0(R_+)$をR_+において連続で$x\to\infty$のとき0にtendするような函数全体のなすBanach空間(maxノルム)とすると，T_tは$C_0(R_+)$の上の強連続なsemigroupになる．そのHille-Yosidaの意味でのgeneratorをAとする．次に$\mathfrak{D}_0$を，コンパクトsupportsをもつ$C^2(R_+)$

の函数 f で $f'(0)=f''(0)=0$ (右微分!) をみたすものの全体とし，$f\in\mathcal{D}_0$ に対して $\bar{f}(x)=f(x\vee 0)$, $x\in R^1$, とおく．
$a(x)$, $b(x)$, $c(x,u)$ を $x<0$ に対して次のように拡張する：

$$\bar{a}(x)=a(x\vee 0),\ \bar{b}(x)=b(x\vee 0),\ \bar{c}(x,u)=c(x\vee 0,u).$$

そして

$$(\bar{I}_0)\quad \begin{aligned}\bar{x}(t) &= x+\int_0^t \bar{a}(\bar{x}(s))\,d\beta(s)+\int_0^t \bar{b}(\bar{x}(s))\,ds\\ &\quad+\int_0^t\int_{R^1}\bar{c}(\bar{x}(s),u)\,\xi(ds\,du)\quad,\ x\in R^1\end{aligned}$$

が定める R^1 上の Markov 過程を $\bar{X}=\{\bar{x}(t),\bar{P}_x,\ x\in R^1\}$ とし，$\bar{\sigma}=\inf\{t>0:\bar{x}(t)\le 0\}$ とおく．

$f\in\mathcal{D}_0$ ならば $\bar{f}\in C^2(R^1)$ であるから，確率積分の変換公式を用いることにより，$\bar{f}$ に $\bar{X}$ の generator をほどこした形は計算出来て，

$$(\bar{\mathfrak{A}}\bar{f})(x)=\frac{1}{2}\bar{a}(x)^2\bar{f}''(x)+\bar{b}(x)\bar{f}'(x)+\int_{R^1}\{\bar{f}(x+\bar{c}(x,u))-\bar{f}(x)-\bar{c}(x,u)\bar{f}'(x)\}\frac{du}{|u|^2}$$

で与えられる．そして Dynkin の公式により，$x>0$ に対し

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\bar{E}_x\{\bar{f}(\bar{x}(\bar{\sigma}\wedge t))\}-\bar{f}(x)}{\bar{E}_x\{\bar{\sigma}\wedge t\}}=(\bar{\mathfrak{A}}\bar{f})(x).$$

一方 $\sigma=\inf\{t>0:x(t)=0\}$ とおくと，$x>0$ に対し

$$\bar{E}_x\{\bar{\sigma}\wedge t\}=E_x\{\sigma\wedge t\},\ \bar{E}_x\{\bar{f}(\bar{x}(\bar{\sigma}\wedge t))\}=E_x\{f(x(\sigma\wedge t))\}$$

が成立するから，$x>0$ に対して

$$(5.1)\qquad \lim_{t\downarrow 0}\frac{E_x\{f(x(\sigma\wedge t))\}-f(x)}{E_x\{\sigma\wedge t\}}=(\overline{\mathfrak{A}}f)(x).$$

今 $\mathcal{D}_1$ を $C_0(R^1)$ の函数 f で (5.1) の左辺の極限が任意の $x>0$ に対して存在し，かつその極限を $g(x)$ としたとき $g(x)$ が次の條件 (5.2) (5.3) をみたすような f の全体とする：

(5.2) $g(x)$ は $x=0$ まで連続的に拡張出来て，その拡張を $\mathfrak{A}f$ としたとき $\mathfrak{A}f\in C_0(R_+)$.

(5.3) f が $x\in R_+$ において最大値をとれば $(\mathfrak{A}f)(x)\leq 0$, かつ $-f$ が $y\in R_+$ で最大値をとれば $(\mathfrak{A}f)(y)\geq 0$.

このとき Dynkin の公式により $\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}_1$，また (5.1) と $\overline{\mathfrak{A}}f$ の形より $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}_1$ がわかる．そこで $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}(A)$ を証明しよう．そのためには $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}_1$ を示せば十分である．$\alpha>0$ とすると $\alpha-A$ は $\mathcal{D}(A)$ から $C_0(R_+)$ の上への 1−1 写像を与える．一方 $\alpha-\mathfrak{A}$ は $\alpha-A$ の拡張であって，(5.3) を用いると $\mathcal{D}_1$ から $C_0(R_+)$ への 1−1 写像を与えることがわかる．したがって $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}_1$ でなければならない．

$\mathcal{D}(A)$ を明確に定める問題はまだ残っているが，以上の考察から $f\in\mathcal{D}_0$ に対しては Af の形を与えることが出来る．

$$n(x,\Gamma)=\int_{\{u:\,x+c(x,u)\in\Gamma\}}\frac{du}{|u|^2},\quad x>0,\ \Gamma\in\mathcal{B}(R^1)$$

とおく.

<u>定理 II</u>(*) $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}(A)$ であって, $f \in \mathcal{D}_0$ ならば, $x > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
(Af)(x) = {} & \frac{1}{2} a(x)^2 f''(x) + b(x) f'(x) \\
& + \int_{(0,\infty)} \{ f(y) - f(x) - (y-x) f'(x) \} \, n(x, dy) \\
& + (f(0) - f(x)) \, n(x, (-\infty, 0]) + f'(x) \int_{(-\infty,0]} (y-x) \, n(x, dy).
\end{aligned}
$$

引用文献

[1] N. Ikeda: On the construction of two-dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problems. Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. 33(1961), 367-427.

[2] J. Elliott: The boundary value problems and semigroups associated with certain integro-differential operators. Trans. Amer. Math.Soc., 76(1954), 300-331.

[3] H. P. McKean: A Skorohod's integral equation for a reflecting barrier diffusion. J. Math. Kyoto Univ., 3(1963), 86-88.

[4] A. V. Skorohod: Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region 1, 2. Teor. Veroyat. 6(1961), 249-274; 7(1962), 3-23.

[5] S. Watanabe: On stable processes with boundary conditions. J. Math. Soc. Jap. 14(1962), 170-198.

[6] S. Watanabe: On stochastic differential equations for multi-dimensional diffusion processes with boundary conditions. (to appear)

(*) (追加) この定理は次の様に述べた方がよい. $C_0[-\infty,\infty)$ を R^1 において定義された実数値連続函数で, $x \to \infty$ のとき 0 に tend し, $x \to -\infty$ のとき有限な極限値をもつようなもの全体のなす Banach 空間(max ノルム)とする. $\overline{X}$ の semigroup $\overline{T}_t$ は $C_0[-\infty,\infty)$ 上の強連続半群になる. $C_0[-\infty,\infty)$ における $\overline{T}_t$ の generator を $\overline{A}$ とする. R_+ において定義された函数 f が, $\overline{f} \in \mathcal{D}(\overline{A})$ をみたすならば, $f \in \mathcal{D}(A)$ であって, $(Af)(x) = (\overline{A}\,\overline{f})(x)$, $x \in R_+$.